

Inversión de Sistemas: Un enfoque para el diagnóstico de fallas en sistemas lineales multivariables

José Juan Rincón Pasaye, Rogelio Martínez Hernández
División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Mich., México.
jrincon@umich.mx, rogeliohm012685@hotmail.com

Resumen—En este trabajo se presenta la obtención de sistemas inversos por la izquierda con respecto a entradas desconocidas como una alternativa para realizar la estimación de fallas en sistemas lineales multivariables. Se describen dos estrategias: una de ellas basada en el modelo de espacio de estado del sistema y la otra en el modelo en matriz de transferencia. En ambos casos se presentan resultados de un caso de estudio en simulación.

Palabras clave: Sistemas inversos, Diagnóstico de fallas,

I. INTRODUCCIÓN

El problema de inversión de sistemas ha sido objeto de gran interés a lo largo de muchos años y el caso de sistemas lineales multivariables ha sido tratado por muchos investigadores desde la década de 1960. Algunos algoritmos diseñados para la obtención de la dinámica inversa de sistemas lineales fueron publicados en esa década (Silverman 1969) y (Massey y Sain, 1969).

No solamente el caso lineal ha sido estudiado ampliamente; también se han obtenido resultados para el caso no lineal, por ejemplo, (Fliess, 1986) estableció condiciones necesarias y suficientes para la existencia del sistema inverso mediante un enfoque basado en herramientas del álgebra diferencial, por otro lado, (Isidori, 1985) también estableció condiciones y algoritmos para la obtención de sistemas inversos, basado en conceptos de la geometría diferencial. El problema de inversión de sistemas es bien conocido actualmente y a lo largo de su estudio ha alcanzado una gran cantidad de aplicaciones interesantes en el campo del control de sistemas, quizás uno de los más desarrollados es el del control por pre alimentación, ver por ejemplo (Enns, *et al*, 1994) y (Lo Bianco y Piazzi, 2002). Un compendio de diversas aplicaciones de la inversión de sistemas ha sido reportado por (Goodwin, 2002).

A pesar del largo periodo de investigaciones en inversión de sistemas, solo recientemente parece haber cobrado interés la idea de usar sistemas inversos como una alternativa para atacar el problema de diagnóstico de fallas en sistemas dinámicos, ver por ejemplo (Szigeti *et al*, 2000), (Szigeti *et al*, 2001), (Ríos-Bolívar *et al*, 2002), (Edelmayer *et al*, 2004) y (Márquez *et al*, 2004); En estos últimos trabajos, los autores han explorado la posibilidad de utilizar sistemas inversos para resolver el problema de diagnóstico de fallas, considerando dicho problema como

el de reconstrucción de entradas desconocidas. (Edelmayer *et al*, 2004) señala que con algunos inconvenientes, algoritmos clásicos para obtener el sistema inverso como el de Silverman, pueden ser replanteados con el propósito de realizar la reconstrucción de entradas desconocidas en el contexto de diagnóstico de fallas.

En el presente trabajo se desarrolla un algoritmo basado en el de Silverman y se muestra como puede ser aplicado para la reconstrucción de entradas desconocidas para el diagnóstico de fallas. Este enfoque es complementado proponiendo un algoritmo alternativo basado en la matriz de transferencia para la obtención de una inversa por la izquierda respecto a las entradas desconocidas en un sistema lineal multivariable. A continuación se describe la idea básica de cómo un sistema inverso puede ser utilizado con propósitos de diagnóstico de fallas.

Dado un sistema Σ , decimos que Σ_L^{-1} es un sistema inverso por la izquierda de Σ si al conectar la salida de Σ a la entrada de Σ_L^{-1} éste produce como respuesta la entrada de Σ como se ilustra en la Figura 1

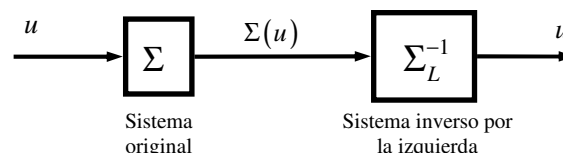


Figura 1: Sistema inverso por la izquierda en cascada con el sistema original

Para que un sistema sea invertible por la izquierda, su mapeo entrada-salida debe ser inyectivo. Es decir,

$$\Sigma(u_1) \neq \Sigma(u_2) \quad (1)$$

Para todo par de entradas $u_1(t) \neq u_2(t)$ para algún $t \geq t_0$.

Si observamos la Figura 1 podemos interpretar el sistema inverso por la izquierda Σ_L^{-1} como un reconstructor de entradas. En el caso de sistemas con fallas podemos separar las entradas en dos conjuntos: entradas conocidas $u(t)$ y entradas desconocidas o fallas $f(t)$, entonces podemos definir el sistema inverso por la izquierda de tres maneras: respecto a todas las entradas, respecto a las entradas conocidas y respecto a las entradas desconocidas y por lo tanto, podemos utilizar la inversión de sistemas por la izquierda respecto a las fallas para la reconstrucción de las mismas como se ilustra en la Figura 2.

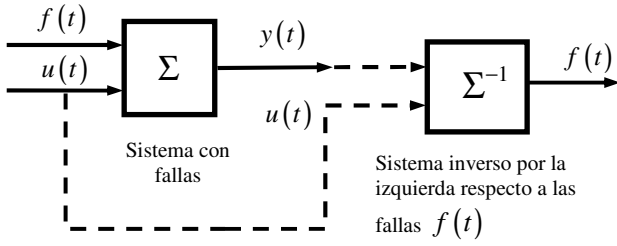


Figura 2: Inversión respecto a entradas desconocidas

II. ALGORITMOS DE INVERSIÓN

A. Enfoque basado en espacio de estado

A continuación se describe el algoritmo de inversión respecto a las fallas propuesto, basado en el algoritmo clásico de Silverman.

Considérese el sistema lineal multivariable con fallas dado por el siguiente modelo de espacio de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + R_1 f(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + R_2 f(t)\end{aligned}\quad (2)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(t) \in R^m$ es el vector de entradas conocidas, $y(t) \in R^p$ es el vector de salidas medibles, $f(t) \in R^l$ es el vector de fallas, consideradas como entradas desconocidas pero diferenciables, y las matrices constantes A , B , C , D , R_1 y R_2 son de las dimensiones apropiadas. Se supone que al menos se tienen tantas salidas medibles como fallas, es decir,

$$p \geq l \quad (3)$$

para cumplir la condición necesaria para diagnosticabilidad dada por (Martínez-Guerra et al, 2007).

El primer paso consiste en calcular el rango de R_2 en (2), sea $q_0 = \text{rank } R_2$, si $q_0 < l$ existirá una matriz S_0 no singular $p \times p$ tal que

$$R_{20} = S_0 R_2 = \begin{bmatrix} \bar{R}_{20} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde R_{20} tiene q_0 renglones y rango q_0 . Entonces se define el sistema auxiliar S_0 como sigue

$$\dot{x} = Ax + Bu + R_1 f \quad (5)$$

$$y_0 = C_0 x + D_0 u + R_{20} f \quad (6)$$

donde $y_0 = S_0 y$, $C_0 = S_0 C$ y $D_0 = S_0 D$, entonces y_0 , C_0 y D_0 se representan en la forma particionada siguiente

$$y_0 = \begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \hat{y}_0 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} \bar{C}_0 \\ \hat{C}_0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad D_0 = \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ \hat{D}_0 \end{bmatrix}$$

donde \bar{y}_0 , \bar{C}_0 y \bar{D}_0 tiene q_0 renglones, \hat{y}_0 , \hat{C}_0 y \hat{D}_0 tiene $l - q_0$ renglones.

A continuación se denota por S_k el k -ésimo sistema de la secuencia, el cual tiene la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu + R_1 f \quad (7)$$

$$y_k = C_k x + D_k u + R_{2k} f \quad (8)$$

Ahora (8) se expresa en la forma particionada

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_k \\ \hat{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_k \\ \hat{C}_k \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \bar{D}_k \\ \hat{D}_k \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \bar{R}_{2k} \\ 0 \end{bmatrix} f \quad (9)$$

donde \bar{y}_k , \bar{C}_k y \bar{D}_k tienen q_k renglones y \hat{y}_k , \hat{C}_k y \hat{D}_k tienen $l - q_k$ renglones.

Tomando la derivada respecto al tiempo de \hat{y}_k se tiene que

$$\dot{\hat{y}}_k = \hat{C}_k A x + \hat{C}_k B u + \hat{C}_k R_1 f + \hat{D}_k \dot{u}$$

entonces (9) se convierte en

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{y}}_k \\ \dot{\hat{y}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_k \\ \hat{C}_k A \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \bar{D}_k \\ \hat{C}_k B \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{D}_k \end{bmatrix} \dot{u} + \begin{bmatrix} \bar{R}_{2k} \\ \hat{C}_k R_1 \end{bmatrix} f \quad (10)$$

Sea $q_{k+1} = \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{R}_{2k} \\ \hat{C}_k R_1 \end{bmatrix}$. Si $q_{k+1} < l$ existirá una matriz

S_{k+1} no singular $p \times p$ tal que

$$R_{2,k+1} = S_{k+1} \begin{bmatrix} \bar{R}_{2k} \\ \hat{C}_k R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}_{2,k+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $\bar{R}_{2,k+1}$ tiene q_{k+1} renglones y rango q_{k+1} . El sistema S_{k+1} se define como

$$\dot{x} = Ax + Bu + R_1 f \quad (11)$$

$$y_{k+1} = C_{k+1} x + D_{k+1} u + \Psi_{k+1} + R_{2,k+1} f \quad (12)$$

donde $\Psi_{k+1} = \sum_{j=1}^k D_{j,k-j+1}^{(j)} u$, y_{k+1} , D_{k+1} y $R_{2,k+1}$ tienen la

misma forma particionada dada por (9), u denota la j -ésima derivada de $u(t)$ y la secuencia $D_{j,k-j+1}^{(j)}$ se describe como sigue

$$D_{11} = S_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{D}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} \\ \hat{D}_{11} \end{bmatrix}, \quad D_{12} = S_2 \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} \\ \hat{D}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{12} \\ \hat{D}_{12} \end{bmatrix}, \dots,$$

$$D_{1k} = S_k \begin{bmatrix} \bar{D}_{1,k-1} \\ \hat{D}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{1k} \\ \hat{D}_{1k} \end{bmatrix}$$

$$D_{21} = S_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{D}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{21} \\ \hat{D}_{21} \end{bmatrix}, \dots, \quad D_{2k} = S_{k+1} \begin{bmatrix} \bar{D}_{k,1} \\ \hat{D}_{1,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{2k} \\ \hat{D}_{2k} \end{bmatrix}$$

⋮

$$D_{k,1} = S_k \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{D}_{k-1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{k,1} \\ \hat{D}_{k,1} \end{bmatrix}$$

Suponiendo que existe algún α tal que $R_{2,\alpha}$ tiene rango l entonces será posible resolver (12) para f como sigue

$$f = R_{2,\alpha}^{-1} C_\alpha x + R_{2,\alpha}^{-1} D_\alpha u - R_{2,\alpha}^{-1} y_\alpha + R_{2,\alpha}^{-1} \Psi_\alpha \quad (13)$$

Sustituyendo (13) en (2) y cambiando x por z obtenemos

$$\dot{z}(t) = (A + R_1 R_{2,\alpha}^{-1} C_\alpha) z + (B + R_1 R_{2,\alpha}^{-1} D_\alpha) u - R_1 R_{2,\alpha}^{-1} y_\alpha + R_1 R_{2,\alpha}^{-1} \Psi_\alpha \quad (14)$$

Así (13) y (14) son las ecuaciones del sistema inverso

$(\alpha-1)$ cuyas entradas son y_α , u , \dot{u} , ..., u (es decir, entradas y salidas del sistema original (2) y derivadas de las mismas) y su salida es el vector de fallas $f(t)$.

Si deseamos usar este sistema inverso dado por (13) y (14) como un mecanismo para la reconstrucción del vector de fallas podemos observar dos problemáticas: Se requieren derivadas de las señales de entrada y salida $u(t)$, $y(t)$ del

sistema y además, las condiciones iniciales para las variables de estado $z(t)$ no son conocidas, por lo que solo podemos esperar que el error debido a ellas desaparezca con el tiempo si el sistema inverso es estable.

B. Enfoque basado en la matriz de transferencia

A continuación se propone un enfoque basado en la matriz de transferencia del sistema (2), del cual aplicando transformada de Laplace, se obtiene

$$\begin{aligned} sx(s) - x_0 &= Ax(s) + Bu(s) + R_1 f(s) \\ y(s) &= Cx(s) + Du(s) + R_2 f(s) \end{aligned} \quad (15)$$

Si en las ecuaciones (15) se agrupan en un vector extendido las variables $x(s)$ y $f(s)$ consideradas como incógnitas, podemos escribir

$$\begin{bmatrix} sI - A & -R_1 \\ C & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ f(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} u(s) + \begin{bmatrix} x_0 \\ y(s) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Ahora se define la matriz M de $n+p$ renglones y $n+l$ columnas, como sigue

$$M = \begin{bmatrix} sI - A & -R_1 \\ C & R_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Como el sistema cumple la condición necesaria para diagnosticabilidad (3), entonces la matriz M puede tener rango $n+l$ por lo tanto la matriz $M^T M$ será no singular, y por lo tanto será posible obtener

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ f(s) \end{bmatrix} = M^\dagger \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} u(s) + M^\dagger \begin{bmatrix} x_0 \\ y(s) \end{bmatrix} \quad (18)$$

donde $M^\dagger = (M^T M)^{-1} M^T$

De la segunda parte de la ecuación (18) podemos obtener una expresión para el vector de falla de la forma

$$f(s) = P(s)u(s) + Q(s)y(s) + R(s)x_0 \quad (19)$$

donde $P(s)$, $Q(s)$ and $R(s)$ son en general matrices de transferencia que contienen elementos no necesariamente propios, por lo tanto la expresión (19) significa que en general se requieren derivadas respecto al tiempo de las entradas y las salidas $u(t)$, $y(t)$ del sistema para poder reconstruir las entradas desconocidas $f(t)$. Otro problema que se advierte en (19) es que si estas matrices tienen elementos con polos inestables, cualquier perturbación o error en las condiciones iniciales provocará un error creciente en la reconstrucción de $f(t)$. Sin embargo, si todos los polos de M^\dagger tienen partes reales negativas el efecto del error en las condiciones iniciales (que normalmente son desconocidas) desaparecerá con el tiempo.

C. Efecto del ruido de medición en la reconstrucción de las fallas.

Como ya se mencionó, en ambas metodologías está involucrado el cálculo de derivadas respecto al tiempo de las señales de entrada y salida del sistema. La presencia inevitable del ruido de medición entonces debe ser cuidadosamente considerada para disminuir su amplificación por el efecto derivativo. Con este objetivo se propone la inclusión de un filtro alisador para procesar las mediciones antes de utilizarlas en el cálculo de las señales falla. La misma idea puede ser utilizada para procesar las

las entradas e inclusive para acelerar la convergencia por error en las condiciones iniciales y se puede expresar como una variante de la ecuación (19) como sigue

$$\hat{f}(s) = P'(s)u(s) + Q'(s)y(s) + R'(s)x_0 \quad (20)$$

En donde las matrices $P'(s)$, $Q'(s)$, $R'(s)$ difieren de $P(s)$, $Q(s)$, $R(s)$ debido a la inclusión de los filtros correspondientes. En la figura 3 se muestra esquemáticamente esta idea para el filtro alisador de las señales de salida medidas.

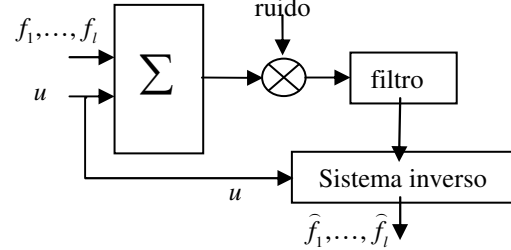


Figura 3. Inclusión de un filtro alisador para reducir el efecto del ruido de medición.

D. Derivadores.

El cálculo de derivadas respecto al tiempo es conocido como un problema mal condicionado que en general no puede realizarse de manera exacta, por lo que solamente pueden hacerse estimaciones de las derivadas involucradas en la reconstrucción de las fallas. Si utilizamos estimadores asintóticos para las derivadas solo podemos aspirar a reconstruir en forma asintótica las señales de falla. Para este objetivo fueron consideradas varias alternativas de estimación de derivadas, optándose al final por el estimador asintótico de derivadas (Ibrir, 2003).

III. CASO DE ESTUDIO

Con el propósito de ilustrar la aplicación de las dos metodologías propuestas se considera el modelo linealizado de un péndulo invertido (Chen & Patton, 1999), en el cual se consideran tres fallas f_1 , f_2 , f_3 , la primera de ellas modela de manera aditiva el efecto de una variación en la ganancia del actuador las otras dos modelan desviaciones en la señal entregada por los sensores de posición angular y lineal respectivamente de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + R_1 f \\ y &= Cx + R_2 f \end{aligned} \quad (21)$$

Donde $f = [f_1 \ f_2 \ f_3]^T$ es el vector de fallas,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.93 & -1.99 & 0.009 \\ 0 & 36.9 & 6.26 & -0.174 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.3205 \\ -1.009 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En este caso $n=3$, $p=3$, $m=1$, $l=3$. Como $p=l$ se cumple la condición necesaria de diagnosticabilidad (3). Se desea operar este sistema en su punto de equilibrio inestable, por lo que previamente se aplicará una

retroalimentación lineal de estados estabilizante de la forma $u = -kx$, donde $k = [1.16 \ -45.04 \ -6.34 \ -3.77]$, con estas ganancias los polos del sistema se colocan en $[-2 \ -2 \ -2 \ -2]$. El sistema (21) en lazo cerrado se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c x + R_1 f \\ y &= Cx + R_2 f \end{aligned} \quad (22)$$

Donde $A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.37 & -16.36 & -4.02 & -1.12 \\ 1.17 & -8.54 & -0.14 & -3.98 \end{bmatrix}$, las matrices

C , R_1 y R_2 son como fueron definidas en (21).

Metodología 1.- Primeramente se aplicará la metodología basada en el modelo de espacio de estado. Para iniciar se requiere calcular el rango de R_2

$$q_0 = \text{rank } R_2 = 2 < l$$

Nótese que R_2 ya tiene la forma de (4), por tanto S_0 es la matriz identidad y (22) también representa el subsistema \mathbb{S}_0 . La salida del sistema (22) se puede escribir en su forma particionada como sigue

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \hat{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_0 \\ \hat{C}_0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \bar{R}_{20} \\ 0 \end{bmatrix} f \quad (23)$$

donde

$$\bar{C}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{C}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{R}_{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para seguir el procedimiento se debe derivar \hat{y} , se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}}_0 &= \hat{C}_0 A_c x + \hat{C}_0 R_1 f \\ \hat{y}_0 &= [0.37 \ -16.36 \ -4.02 \ -1.12] x + [0 \ 0 \ 1] f \end{aligned}$$

Reemplazando \hat{y}_0 por $\dot{\hat{y}}_0$ en (23),

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \dot{\hat{y}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.37 & -16.36 & -4.02 & -1.12 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f$$

Ahora $q_1 = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 = l$, por lo tanto $\alpha = 1$,

el subsistema \mathbb{S}_1 es

$$\dot{x} = Ax + Bu + R_1 f \quad (25)$$

$$y_\alpha = C_\alpha x + R_{2\alpha} f \quad (26)$$

donde

$$y_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{y}_\alpha \\ \dot{\hat{y}}_\alpha \end{bmatrix}, C_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.37 & -16.36 & -4.02 & -1.12 \end{bmatrix},$$

$$R_{2\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora es posible resolver (26) para f como sigue

$$f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0.37 & 16.36 & 4.02 & 1.12 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Por lo tanto la dinámica del sistema inverso se obtiene sustituyendo (27) en (25) y utilizando z para denotar los estados de este nuevo sistema.

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.17 & -8.54 & -0.14 & -3.98 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{y}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0.37 & 16.36 & 4.02 & 1.12 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix}$$

El sistema (28) es el inverso por la izquierda respecto a las fallas de (22), en él se puede observar que sus entradas contienen son las salidas del sistema original, así como algunas derivadas. Para la simulación se consideraron fallas tipo escalón y un filtro pasa bajas Butterworth de segundo orden para reducir el efecto del ruido de medición. La función de transferencia de este filtro es,

$$G(s) = \frac{39.48}{s^2 + 8.89s + 39.48} \quad (29)$$

La cual corresponde a una frecuencia de corte $\omega_c = 6.28 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$. Las condiciones iniciales tanto para el sistema original como para el inverso son (0,0,0,0). Las salidas del sistema están contaminadas con ruido de media cero y varianza 0.0025 (lo cual representa aproximadamente un 30% de la magnitud de la salida y_2). Las fallas f_1 , f_2 y f_3 son tipo escalón y aparecen en $t_1 = 15$ seg, $t_2 = 25$ seg y $t_3 = 40$ seg respectivamente.

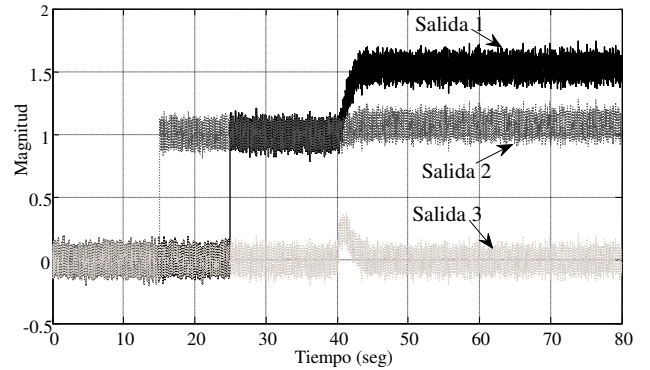


Figura 4: Salidas con ruido del sistema original.

Las mediciones con ruido de las salidas se muestran en la Figura 4. La Figura 5 muestra la reconstrucción de las fallas en comparación con las fallas reales, se puede apreciar que el efecto del ruido es prácticamente despreciable en la reconstrucción de f_1 y f_2 , sin embargo en f_3 es apreciable una afectación, esto se debe a la necesidad de la derivada de \dot{y}_3 para su reconstrucción, de acuerdo a (28).

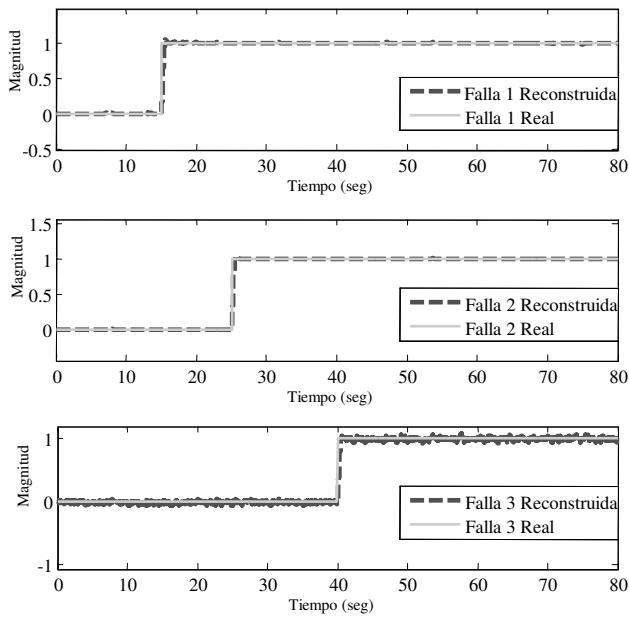


Figura 5: Comparación entre las fallas reales y su reconstrucción, metodología 1.

Metodología 2. A continuación se aplica la metodología basada en la función de transferencia para sistema en lazo cerrado dado por (22).

Para iniciar el procedimiento se requiere formar la matriz M como sigue.

$$M = \begin{bmatrix} sI - A & -R_1 \\ C & R_2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} s & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.37 & 16.36 & s + 4.02 & 1.12 & 0 & 0 & -1 \\ -1.17 & 8.54 & 0.14 & s + 3.98 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando la expresión (18) se puede resolver para x y para f y suponiendo condiciones iniciales (0,0,0,0), entonces las expresiones para las fallas quedan de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} f_1 &= y_1 - \frac{1}{s} y_3 \\ f_2 &= y_2 + \frac{0.14s - 1.17}{s^3 + 3.98s^2 + 8.54s} y_3 \\ f_3 &= \frac{5s^3 + 24s^2 + 31.88s + 15.98}{s^3 + 3.98s^2 + 8.54s} y_3 + \frac{s^3}{s^3 + 3.98s^2 + 8.54s} \dot{y}_3 \end{aligned} \quad (30)$$

Nótese que es necesario incluir la derivada respecto del tiempo de y_3 ya que el residuo para f_3 contiene una función de transferencia impropia con respecto a esta salida.

Para esta simulación se utilizaron los mismos valores de ruido y de condiciones iniciales que en el ejemplo 1. También se utilizó el mismo filtro (29) para disminuir el efecto del ruido de medición. La Figura 6 muestra la comparación entre las fallas originales y su respectiva

reconstrucción. Nótese que la reconstrucción es muy similar a la obtenida con el enfoque de espacio de estado.

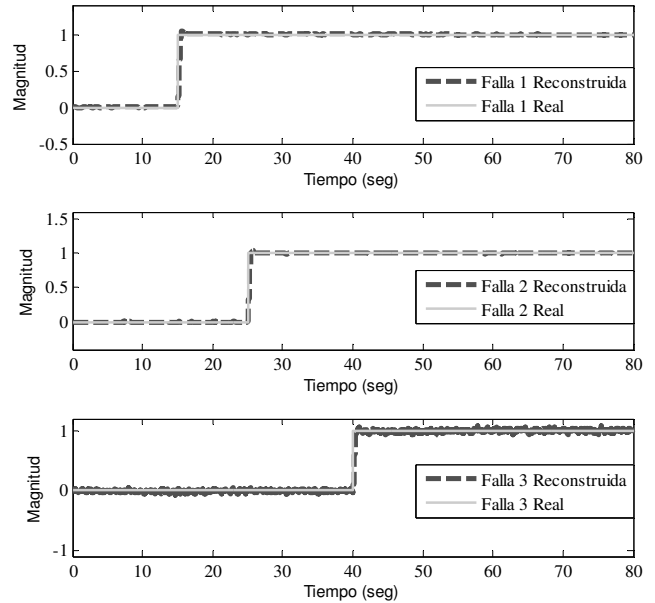


Figura 6: Comparación entre las fallas reconstruidas y las reales, metodología 2.

Se puede observar de la Figuras 6 que otra vez el ruido presente en la reconstrucción de la falla f_3 es de mayor amplitud en comparación con el ruido presente en las fallas f_1 y f_2 , esto se debe a que nuevamente el sistema inverso utilizado (30) requiere la derivada de y_3 para la reconstrucción de f_3 .

Obsérvese también que aunque los resultados en la reconstrucción de las fallas son muy similares con ambas metodologías, el sistema inverso (28) obtenido con la metodología de espacio de estado es de cuarto orden, mientras que el sistema inverso (30) obtenido con la metodología basada en función de transferencia, es sólo de tercer orden, por lo que representa una versión más sencilla para la reconstrucción basada en el sistema inverso.

IV. CONCLUSIONES

Se han propuesto dos algoritmos para la obtención de sistemas inversos por la izquierda respecto a las fallas en sistemas lineales multivariables. Se han evaluado las condiciones necesarias para la diagnosticabilidad y, se ha utilizado dicho sistema en conjunto con estrategias de estimación de derivadas para realizar la estimación de las señales de falla. El efecto indeseable de la amplificación de ruido por los derivadores no parece depender del sistema inverso utilizado en la reconstrucción sino de la presencia de derivadas en la ecuación específica de la falla a reconstruir.

REFERENCIAS

Silverman L. M., (1969), "Inversion of multivariable linear systems," IEEE Trans. Automatic Control 14 (1969), no. 3, 270–276.

- Massey J. L. and Sain M. K.,(1969), "Invertibility of linear time-invariant dynamical systems," *IEEE Trans. Automat. Cow.*, vol. AG14, pp. 141-149, Apr. 1969.
- Szigeti F., Ríos-Bolívar A. and Tarantino R.,(2000), "Fault detection and isolation filter design by inversion: The case of linear systems," 4th IFAC SAFEPROCESS Conference (Budapest - Hungary), 2000, pp. 379–384.
- Ríos-Bolívar A., Szigeti F., and García G., (2002), "On FDI filters and system invertibility," Proc. 15th IFAC World Congress (IFAC 2002), Barcelona - Spain, 2002.
- Szigeti F., Vera C., Bokor J., and Edelmayer A., (2001), "Inversion based fault detection and isolation," 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2001, pp. 1005–1010.
- Edelmayer A., Bokor J., Szabó Z. and Szigeti F., (2004), "Input reconstruction by means of system inversion: a geometric approach to fault detection and isolation in nonlinear systems" *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2004, vol. 14, No. 2, 189-199.
- Fliess M., (1986) "A note on the invertibility of nonlinear input-output differential systems", *Sys. Cont. Ltrts.*, North Holland, 8 pp. 147-151 (1986).
- Isidori A. ,(1995), "*Nonlinear Control Systems*", Springer-Verlag. London (Third Edition),1995.
- Enns, D., Bugajski, D., Hendrick, R., & Stein, G.,(1994), "Dynamic inversion: An evolving methodology for flight control design." *Int. Journal of Control*, 59(1), 71–91, (1994).
- Guarino Lo Bianco C. and Piazzì A. (2002), "A servo control system design using dynamic inversion" , *Cont. Eng. Practice*, 10 (2002), pp. 847-855.
- Goodwin G. C., (2002), "Inverse problems with constraints". Proc 15th IFAC World Congress, Barcelona, Spain, 2002
- Martínez-Guerra R. Luviano-Juárez A. and Rincón-Pasaye J. J. (2002), "Fault estimation using algebraic observers". Proc. American Control Conference, N. Y. city, USA. pp. 438,442, 2007
- R. Marquez, A. Ríos-Bolívar, E. Teles (2004). "A transfer function approach to fault diagnosis for linear systems: inversion and low-pass filters". Proc. DX'04 (15th Internat. Workshop Principles Diagnosis), pp. 105-110, Carcassonne.
- Chen J., Patton R. J.,(1999), "*Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*", Kluwer Academic Publishers, 1999.
- Ibrir, S., (2003), "Online exact differentiation and notion of asymptotic algebraic observers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 11, pp. 2055–2060, November 2003.